Άσκηση 1η

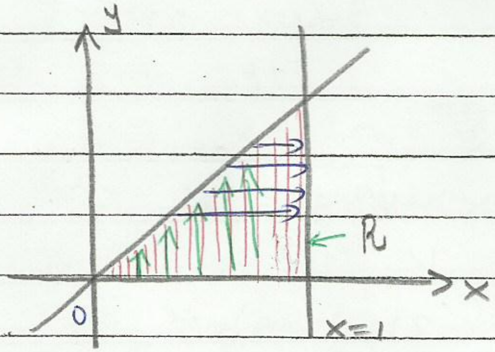
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dA$$

στο χωρίο ολοκλήρωσης R, όπου R το τρίγωνο του επιπέδου xy που φράσσεται από τον άξονα x, την ευθεία $y=x$ και την $x=1$. Να σχεδιαστεί το χωρίο ολοκλήρωσης

ΛΥΣΗ



Γενικά το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ δεν υπολογίζεται, παρά μόνο προσεγγιστικά (πχ μέσω Taylor). Έτσι, θα πρέπει τη συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$ να την βγάλουμε "off side". Το τι εννοούμε θα το διακρίνεται παρακάτω:

$R = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1 \ \text{και} \ 0 \leq y \leq x \}$ (κανονικό ως προς x)

ή μπορούμε να επιλέξουμε το εξής

$R = \{ (x,y) : y \leq x \leq 1 \ \text{και} \ 0 \leq y \leq 1 \}$ (κανονικό ως προς y)

Συνεπώς,

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dA = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot [y]_0^x\, dx =$$

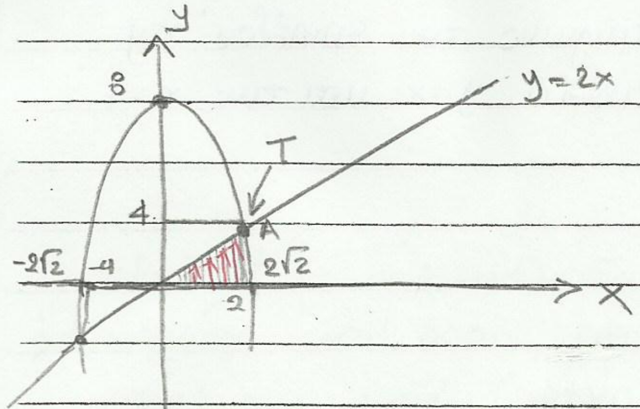
$$= \int_0^1 \sin x\, dx = [-\cos x]_0^1 = 1 - \cos 1$$

(Ο όρος "of side" θα πει ότι εμείς θέλουμε να ολοκληρώσουμε ως προς y με σταθερό το x).

Άσκηση 2η

Να υπολογιστεί η μάζα λεπτής πλάκας με σύνορο τις καμπύλες $y=2x$, $y=8-x^2$, $y=0$ με $x,y\geq 0$ και πυκνότητα:
$\delta(x,y)=x+2y$

ΛΥΣΗ



$$\text{Μάζα}=\iint_T \delta(x,y)\,dx\,dy = \iint_T (x+2y)\,dx\,dy.$$

όπου $T=\left\{(x,y):\ 0\leq y\leq 4 \ \&\ \frac{y}{2}\leq x\leq \sqrt{8-y}\right\}$.

Διότι $8-x^2=2x \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x-2)(x+4)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=2$ ή $x=-4$

και $y=8-x^2 \Rightarrow x^2=8-y \Rightarrow x=\pm\sqrt{8-y} \overset{x\geq 0}{\Longrightarrow} x=\sqrt{8-y}$

Συνεπώς,

$$\iint_T (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{8-y}} (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{8-y}} dy =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{8-y}^2}{2} + \underbrace{2y\sqrt{8-y}}_{(*)} - \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2} - 2y\cdot\frac{y}{2}\right) dy \quad (1)$$

$(*)$ $\int 2y\sqrt{8-y}\,dy$ Θέτω $u=\sqrt{8-y} \Rightarrow y=8-u^2 \Rightarrow dy=-2u\,du$

$$\int 2(8-u^2)\cdot u\,(-2u)\,du = \int -4u^2(8-u^2)\,du = -4\int 8u^2-u^4\,du =$$

$$= -\frac{32u^3}{3} + \frac{4u^5}{5} = -32\,\frac{\sqrt{8-y}^3}{3} + 4\,\frac{\sqrt{8-y}^5}{5}$$

Άρα, η (1) θα βγει αν συνεχίσουμε τους απλούς υπολογισμούς

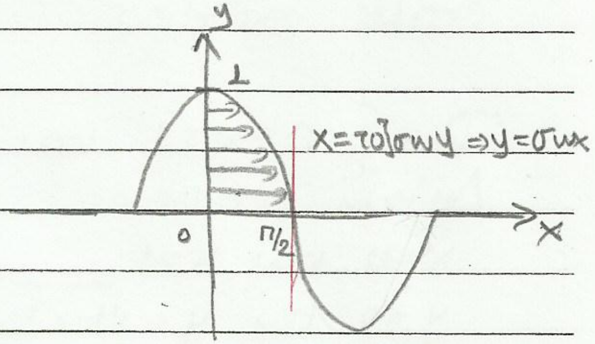
ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ (ΘΕΤΙΚΕΣ) ΣΧΟΛΕΣ:

1) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^1\int_0^{\text{τοξσυν}\,y} \text{συν}\,x \; dx\, dy$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε το χωρίο:



$D=\{0\le y\le 1$ και $0\le x\le \text{τοξσυν}\,y\}$

Δηλαδή έχουμε

$y=0\ ,\ y=1$

$x=0\ ,\ x=\text{τοξσυν}\,y \overset{\text{αντιστρ.}}{\Rightarrow} y=\text{συν}\,x$

Άρα, μετατρέπουμε το D από κανονικό χωρίο ως προς y σε κανονικό χωρίο ως προς x. Δηλαδή, ισοδύναμα:

$D=\{0\le x\le \frac{\pi}{2}$ και $0\le y\le \text{συν}\,x\}$

Άρα, το x μεταβάλλεται πλέον με σταθερά όρια.

Συνεπώς,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\text{συν}x} \text{συν}x\; dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\,(\text{συν}x-0)\,dx =$$

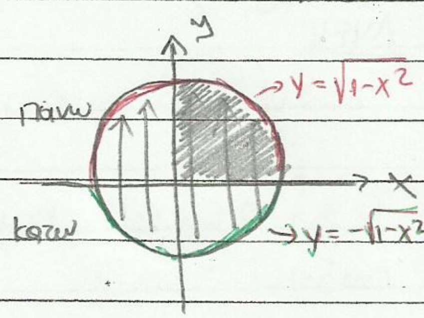
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^2x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\text{συν}2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-y^2}\right)^3 dy\,dx$$

ΛΥΣΗ

ΔΙΣΚΟΣ



Έχουμε τον τόπο

$D=\{\,0\le x\le 1$ και $0\le y\le\sqrt{1-x^2}\,\}$

Δηλαδή έχουμε

$x=0$ και $x=1$

$y=0$ και $y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2\overset{x\ge 0}{\Rightarrow} x=\sqrt{1-y^2}$

Άρα μετατρέπουμε τον τόπο μας σε κανονικό ως προς y

$D=\{\,0\le y\le 1$ και $0\le x\le\sqrt{1-y^2}\,\}$

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\left(\sqrt{1-y^2}^{\,3}\right)dx\,dy=\int_0^1\sqrt{1-y^2}^{\,3}\cdot\left[x\right]_0^{\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt{1-y^2}\right)^3\cdot\sqrt{1-y^2}\,dy=\int_0^1(1-y^2)^{3/2+1/2}\,dy=$$

$$=\int_0^1(1-y^2)^2\,dy=\frac{8}{15}.$$

3) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

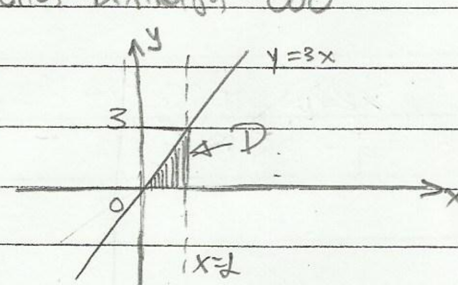
$$I=\int_0^3\int_{y/3}^1\cos\frac{\pi}{2}x^2\,dx\,dy$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε το χωρίο (ή τόπο)

$D=\{\,0\le y\le 3$ και $\frac{y}{3}\le x\le 1\,\}$

Εφαρμόζουμε ότι κάναμε στις (1) και (2) (Σκοπός αλλαγή του τύπου χωρίου από τύπου 2 σε τύπου 1)



$y=0$ και $y=3$

Ενώ $x=\frac{y}{3}$ και $x=1\Rightarrow y=3x$ και $x=1$

Έτσι το χωρίο ισοδύναμα γράφεται

D = {

Δηλαδή,

$$I=\int_0^1\int_0^{3x}\cos\frac{\pi}{2}x^2\,dy\,dx=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x^2\cdot(3x-0)\,dx=$$

$$=\int_0^1 3x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x^2\,dx=3\int_0^1 x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x^2\,dx \quad (1)$$

Θέτω $u=\frac{\pi x^2}{2}\Rightarrow du=\pi x\,dx\Rightarrow x\,dx=\frac{1}{\pi}\,du$

όταν $x=0$ τότε $u=0$

όταν $x=1$ τότε $u=\frac{\pi}{2}$

$$(1)\rightarrow 3\cdot\int_1^{\pi/2}\cos u\cdot\frac{1}{\pi}\,du=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du=$$

$$=\frac{3}{\pi}\cdot\Big[+\sin u\Big]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{\pi}\left(+\sin\frac{\pi}{2}+\sin 0\right)=\frac{3}{\pi}$$

4) Για το παρακάτω διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dy\,dx$$

α. Να παρασταθεί γραφικά το χωρίο ολοκλήρωσης

β. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα (μέσω αλλαγής σειράς ολοκλήρωσης)

ΛΥΣΗ

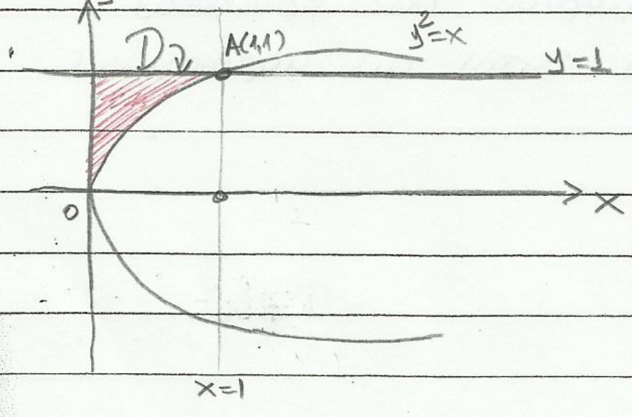
α. Το χωρίο είναι το εξής:

$D=\{0\le x\le 1$ και $\sqrt{x}\le y\le 1\}$ (Τύπος 1)

Γραφική αναπαράσταση:

$x=0$ και $x=1$

$y=\sqrt{x}$ και $y=1\Rightarrow y^2=x$ και $y=1$



$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dy\,dx \quad (1)$$

Δηλαδή το D ισοδύναμα γράφεται

$D=\{0\le y\le 1$ και $0\le x\le y^2\}$

Άρα το (1) ισοδύναμα γράφεται

$$I=\int_0^1\int_0^{y^2}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dx\,dy=$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\int_0^{y^2} dx\,dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{\cancel{y}}\cdot y^{\cancel{2}}\,dy = \int_0^1 y\cdot\sqrt{1-y^2}\,dy \quad (2)$$

Θέτω το $1-y^2=u \Rightarrow du=-2y\,dy \Rightarrow -\frac{1}{2}du = y\,dy$

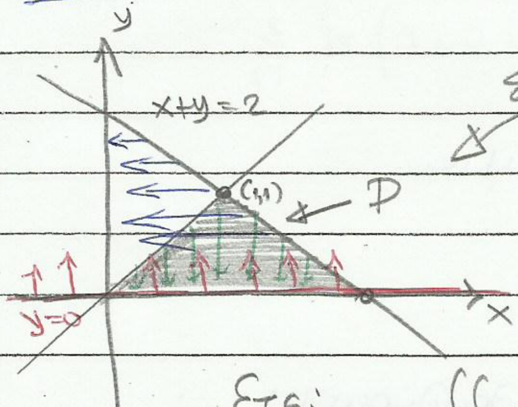
Άρα, (2) είναι (αν αλλάξουμε και τα άκρα)

$$\int_1^0 \sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy \quad \text{όπου} \quad D=\{(x,y): y\geq 0,\ x\leq 2-y,\ y\leq x\}$$

ΛΥΣΗ



Σχηματικά $\begin{cases} y\geq 0 \\ x\leq 2-y \\ y\leq x \end{cases}$ τότε:

Δηλ. $D=\{0\leq y\leq 1$ και $y\leq x\leq 2-y\}$

Έτσι, $\displaystyle\iint_D xy^2\,dx\,dy = \int_0^1\int_y^{2-y} xy^2\,dx\,dy =$

$$= \int_0^1 y^2\int_y^{2-y} x\,dx\,dy = \int_0^1 y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{2-y}dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(2-y)^2-y^2}{1}\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4y^2-4y^3)\,dy = \frac{1}{6}.$$